定义两个四元数：

https://gss1.bdstatic.com/9vo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D182/sign=b353433f60d0f703e2b291d43afa5148/14ce36d3d539b60003b31a9feb50352ac65cb79c.jpg

https://gss3.bdstatic.com/7Po3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D178/sign=d3210ec5a1cc7cd9fe2d30de01002104/8cb1cb1349540923a2da76569058d109b3de4962.jpg

其中

https://gss2.bdstatic.com/9fo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D14/sign=5d9908201d30e924cba498354d088fd8/7dd98d1001e939017bae981679ec54e736d1966d.jpg

表示矢量

https://gss1.bdstatic.com/-vo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D65/sign=8a4084da7f1ed21b7dc92de0ac6e779d/63d0f703918fa0ec052e7125249759ee3d6ddb28.jpg

；而

https://gss2.bdstatic.com/-fo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D14/sign=81a94711cb3d70cf48faae09f9dc6be2/a8014c086e061d95f4ec221079f40ad162d9ca74.jpg

表示矢量

https://gss3.bdstatic.com/7Po3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D65/sign=490179f63f6d55fbc1c675236c2295e2/9c16fdfaaf51f3dedb19ac4c96eef01f3a29796a.jpg

。

四元数加法：p + q

跟复数、向量和矩阵一样，两个四元数之和需要将不同的元素加起来。

https://gss2.bdstatic.com/-fo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D394/sign=1fc19ab9cf11728b342d8a2bfcfdc3b3/d01373f082025aaf6ace6be3f9edab64034f1a1d.jpg

加法遵循实数和复数的所有交换律和结合律。

四元数乘法：pq

两个四元数之间的非可换乘积通常被[格拉斯曼](https://baike.baidu.com/item/%E6%A0%BC%E6%8B%89%E6%96%AF%E6%9B%BC" \t "_blank)（Hermann Grassmann）称为积，这个积上面已经简单介绍过，它的完整型态是︰

https://gss1.bdstatic.com/-vo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D216/sign=812d3bc0f31f3a295ec8d2cfaf24bce3/7e3e6709c93d70cf36be3013fbdcd100baa12b63.jpg

https://gss0.bdstatic.com/-4o3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D572/sign=84c33f35357adab439d01b44b9d5b36b/54fbb2fb43166d2233909989452309f79152d2cc.jpg

由于四元数乘法的非可换性，pq并不等于qp。格拉斯曼积常用在描述许多其他代数函数。qp乘积的向量部分是：

https://gss2.bdstatic.com/-fo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D216/sign=f321c2a54410b912bbc1f1fff5fdfcb5/72f082025aafa40f75cb4bc3a864034f78f0199a.jpg

四元数点积： p · q

[点积](https://baike.baidu.com/item/%E7%82%B9%E7%A7%AF)也叫做欧几里德内积，四元数的点积等同于一个四维向量的点积。点积的值是p中每个元素的数值与q中相应元素的数值的乘积的和。这是四元数之间的可换积，并返回一个[标量](https://baike.baidu.com/item/%E6%A0%87%E9%87%8F" \t "_blank)。

https://gss1.bdstatic.com/9vo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D237/sign=9ea65ad30846f21fcd345950c1246b31/0dd7912397dda144e458789ab0b7d0a20cf48640.jpg

点积可以用格拉斯曼积的形式表示：

https://gss1.bdstatic.com/-vo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D112/sign=7fc67bb7a60f4bfb88d09a55314e788f/a8014c086e061d95f7bf231079f40ad162d9ca19.jpg

这个积对于从四元数分离出一个元素有用。例如，i项可以从p中这样提出来：

https://gss1.bdstatic.com/9vo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D53/sign=b0f2b612324e251fe6f7e4fba686138c/8ad4b31c8701a18b761006679c2f07082838fe1b.jpg

四元数外积：Outer(p,q)

欧几里德外积并不常用； 然而因为外积和内积的格拉斯曼积形式的相似性，它们总是一同被提及：

https://gss0.bdstatic.com/-4o3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D161/sign=65c292c69e82d158bf825db7b10b19d5/0ff41bd5ad6eddc4e511a0d33bdbb6fd52663327.jpg

https://gss1.bdstatic.com/-vo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D199/sign=853fd62eadc3793179688220d2c5b784/a8014c086e061d95f7b4231079f40ad162d9ca2c.jpg

https://gss1.bdstatic.com/-vo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D521/sign=ed45a400347adab439d01b41bad4b36b/b3fb43166d224f4a35f8643b0bf790529822d1b0.jpg

四元数偶积：Even(p,q)

四元数偶积也不常用，但是它也会被提到，因为它和奇积的相似性。它是纯对称的积；因此，它是完全可交换的。

https://gss2.bdstatic.com/9fo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D143/sign=7a91d52eadc379317968822dd8c4b784/7af40ad162d9f2d3554d33c7abec8a136327ccbd.jpg

https://gss2.bdstatic.com/-fo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D218/sign=344f8406aad3fd1f3209a53b084f25ce/dcc451da81cb39db0039707ed2160924ab183018.jpg

https://gss1.bdstatic.com/-vo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D457/sign=fe00bd25fadcd100c99cf924458a47be/0eb30f2442a7d9330d52f35baf4bd11373f0011b.jpg

叉积：p × q

四元数叉积也称为奇积。它和向量叉积等价，并且只返回一个向量值：

https://gss0.bdstatic.com/-4o3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D106/sign=3e04f211b1de9c82a265fd8f5a8180d2/d788d43f8794a4c2d142f1030cf41bd5ad6e39b0.jpg

https://gss1.bdstatic.com/9vo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D86/sign=c29d90048501a18bf4eb1f499e2fb616/96dda144ad345982fbfef3ba0ef431adcbef84a5.jpg

https://gss1.bdstatic.com/-vo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D287/sign=82054341272dd42a5b0906a3343b5b2f/2fdda3cc7cd98d1054c61a19233fb80e7bec9083.jpg

四元数转置：p−1

四元数的转置通过

https://gss3.bdstatic.com/7Po3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D59/sign=bbd5202359b5c9ea66f303ead539f31e/a71ea8d3fd1f413418441356271f95cad1c85ea2.jpg

被定义。它定义在上面的定义一节，位于属性之下（注意变量记法的差异）。其建构方式相同于复倒数（complex inverse）之构造：

https://gss2.bdstatic.com/-fo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D74/sign=947df590d63f8794d7ff4a2ad21b7a02/10dfa9ec8a13632764e8d41b938fa0ec08fac794.jpg

一个四元数的自身点积是个纯量。四元数除以一个纯量等效于乘上此纯量的倒数，而使四元数的每个元素皆除以此一除数。

四元数除法：p−1q

四元数的不可换性导致了

https://gss3.bdstatic.com/7Po3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D32/sign=b5289a194890f60300b09a453812a5f1/11385343fbf2b211acb99366c88065380cd78e06.jpg

和

https://gss2.bdstatic.com/-fo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D33/sign=aa505e06d01b0ef468e89e5ddcc476d9/09fa513d269759ee33ff76e3b0fb43166d22df6e.jpg

的不同。这意味着除非p是一个标量，否则不能使用q/p这一符号。

四元数纯量部：Scalar(p)

四元数的标量部分可以用前面所述的点积来分离出来：

https://gss0.bdstatic.com/94o3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D116/sign=15d12fcf932397ddd2799c056f83b216/b58f8c5494eef01f4ac00eede2fe9925bd317dc5.jpg

四元数向量部：Vector(p)

四元数的向量部分可以用外积提取出来，就象用点积分离标量那样：

https://gss0.bdstatic.com/-4o3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D266/sign=46e6f590d63f8794d7ff4f28e41a0ead/79f0f736afc37931def69001e9c4b74543a9117f.jpg

四元数模：|p|

四元数的绝对值是四元数到原点的距离。

https://gss3.bdstatic.com/-Po3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D273/sign=095a9701e9c4b7453094b011fcfc1e78/f3d3572c11dfa9ec891c473f60d0f703918fc1e3.jpg

四元数符号数：sgn(p)

一复数之符号数乃得出单位圆上，一个方向与原复数相同之复数。四元数的符号数亦产生单位四元数：

https://gss1.bdstatic.com/-vo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D83/sign=1c218f00952bd40746c7defe7b89494e/6c224f4a20a446231cf2b44a9a22720e0cf3d7d9.jpg

四元数辐角：arg(p)

幅角函数可找出一4-向量四元数偏离单位纯量（即：1）之角度。此函数输出一个纯量角度。

https://gss3.bdstatic.com/-Po3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D193/sign=9cd55fd30846f21fcd345a5ac5246b31/5882b2b7d0a20cf47ab2eff774094b36acaf99f3.jpg